平成３１年度

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 入学試験

数学専攻 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2. 問題は専門基礎課題が３題 ([1],[2],[3]) と専門課題が４題 ([4],[5],[6],[7]) の合計７題ある．そのうち４題選択し解答せよ．ただし，
[4] を選択する場合には (A), (B) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[5] を選択する場合には (C), (D) のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
[7] を選択する場合には (G), (H), (I) のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．

3. 答案冊子は答案用紙４枚からなる．それぞれの答案用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること．解答は答案用紙１枚につき１題とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また，[4], [5], [7] では (A), (B), (C), (D), (G), (H), (I) の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には,「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．

4. 下書用紙は４枚ある．それぞれの下書用紙に，研究科名・専攻名・受験番号を記入すること．

5. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を, それぞれ表すものとする.

[**1**]　$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ を定義域とする関数 f, g をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \log(x^2+y^2+z^2), \\
g(x,y,z) &= (x^2+y^2+z^2)(f(x,y,z)-1)
\end{aligned}
$$

で定め，$\Delta g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ とおく.

(1) Δg を求めよ.

(2) $0 < a < b$ とし，$D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$ とおく．次の積分の値を a, b を用いて表せ.

$$\iiint_{D_{a,b}} f(x,y,z)dxdydz$$

(3) $c > 0$ とし，$D_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2+z^2 \leq c^2\}$ とおく．次の広義積分の値を c を用いて表せ.

$$\iiint_{D_c} (\Delta g)(x,y,z)dxdydz$$

数学

[**2**]　4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

と A の定める線形変換

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組ずつ求めよ．

(2) a を実数とする．連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 2a+1 \\ a \end{pmatrix}$$

が解を持つために a が満たすべき条件を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ となるような行列 B で行数が最小であるものを 1 つ求めよ．

[**3**]　D と E を集合 X 上の同値関係とし, X 上の 2 項関係 $\sim$ を次で定義する.

$x \sim y \Leftrightarrow x_0, \ldots, x_n \in X$ $(n \geq 1)$ が存在して, 次の 2 条件を満たす：

・$x_0 = x,\ x_n = y$

・$x_i D x_{i+1}$ または $x_i E x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$

このとき, 以下を示せ.

(1) $\sim$ は X 上の同値関係である.

(2) X 上の同値関係 $\equiv$ が次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$$x, y \in X \text{ に対して } xDy \text{ または } xEy \text{ ならば } x \equiv y. \qquad (*)$$

このとき, $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ ならば $x \equiv y$ が成り立つ.

数学

[4] 次の **(A), (B)** のうち **1** つを選び解答せよ.

（A）

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\, ad - bc = 1 \right\},$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $SL_2(\mathbb{R})$ は行列の積に関して群になることを示せ (ただし, 行列の積が結合律を満たすことは示さなくてよい).

(2) 以下の行列を $\{p(t),\, q(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ のいくつかの元の積で表せ.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) 群 $SL_2(\mathbb{R})$ が $\{p(t),\, q(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ で生成されることを示せ.

(4) $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in SL_2(\mathbb{R})\}$ で生成される $SL_2(\mathbb{R})$ の部分群を D とおく. $D = SL_2(\mathbb{R})$ となることを示せ.

（B） 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の二変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ の剰余環

$$A = \mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2)$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) A の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ.

(2) A のイデアル I が $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として 2 次元のとき，剰余環 A/I は一変数多項式環 $\mathbb{C}[t]$ の剰余環 $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ と同型であることを示せ.

(3) 二変数多項式環 $\mathbb{C}[t, u]$ の剰余環

$$B = \mathbb{C}[t, u]/(t^2 - u^2, tu)$$

は A と同型であることを示せ.

数学

[5] 次の **(C), (D)** のうち１つを選び 解答せよ.

(C) $0 < r < R$ とする．パラメータ表示

$$p(\phi, \psi) = \big((R + r\cos\phi)\cos\psi,\ (R + r\cos\phi)\sin\psi,\ r\sin\phi\big) \quad (\phi, \psi \in \mathbb{R})$$

が定める $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を T で表す.

(1) p の ϕ, ψ による偏微分 p_ϕ, p_ψ は各点で線形独立であることを示せ.

(2) T の単位法ベクトル場 e を求めよ.

(3) e を T から $\mathbb{R}^3$ への写像とみなしたとき，T の各点における e の微分写像の階数を求めよ.

(D) X をハウスドルフ空間とする. A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を X の部分集合の列であって

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \cdots$$

を満たすものとし, $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおく. 以下, 各 A_i には X の部分空間としての位相が入っているものとする.

(1) Y の部分集合族 $\mathcal{O}$ を以下のように定めるとき, $(Y, \mathcal{O})$ は位相空間となることを示せ.

$$\mathcal{O} = \{\, U \subset Y \mid \text{任意の } i = 1, 2, \ldots \text{ に対して } U \cap A_i \text{は } A_i \text{の開集合} \,\}$$

(2) Y の部分集合 F に対して以下が同値であることを示せ.

(i) F は $(Y, \mathcal{O})$ の閉集合である.

(ii) 任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対し, $F \cap A_i$ は A_i の閉集合である.

(3) 各 $i = 1, 2, \ldots$ に対し, 点 x_i を $x_i \in Y \setminus A_i$ となるようにとる．$M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ とおくとき, M の任意の部分集合は $(Y, \mathcal{O})$ の閉集合となることを示せ.

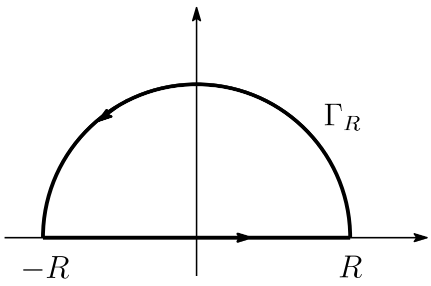
(4) $K \subset Y$ を $(Y, \mathcal{O})$ のコンパクト部分集合とする. このとき $K \subset A_\ell$ なる正整数 ℓ が存在することを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

[6] 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ の $z = i$ での極の位数と留数を求めよ.

(2) 下図のような半円を複素平面において考え, その周に正の向きをつけたものを Γ_R とする.



このとき複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$ を考えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{(x^2+1)^2} dx$ を求めよ.

数学

[7] 次の **(G)**, **(H)**, **(I)** のうち１つを選び 解答せよ.

(G) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 B^* で，任意の直線と丁度 2 点で交わるものが存在することが知られている．以下の方針に従いこれを示せ.

$2^{\aleph_0}$ を $\mathbb{R}$ の濃度 $|\mathbb{R}|$ とする．$L = \{l_\alpha\}_{\alpha<2^{\aleph_0}}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の直線全体を整列したものとする．順序数 $\alpha < 2^{\aleph_0}$ に関する帰納法で，集合 $A_\alpha \subset l_\alpha$ $(|A_\alpha| \leq 2)$ を以下のように定める．全ての順序数 $i < \alpha$ について A_i が定まっているとする.

- $B_\alpha = \bigcup_{i<\alpha} A_i$
- $L_\alpha = \{l \in L \mid |l \cap B_\alpha| \geq 2\}$

とおく．$|l_\alpha \cap B_\alpha| = n < 2$ のとき, $l_\alpha \setminus \bigcup L_\alpha$ の $(2-n)$-点部分集合を A_α として任意に選ぶ. それ以外の場合は A_α を空集合とする.

最後に $B^* = \bigcup_{i<2^{\aleph_0}} A_i$ とする.

(1) 平面直線全体の集合 L の濃度が $2^{\aleph_0}$ になる理由を述べよ.

(2) $|B_\alpha| < 2^{\aleph_0}$ を示せ.

(3) $|L_\alpha| < 2^{\aleph_0}$ を示せ.

(4) B^* は各直線 $l \in L$ と丁度 2 点で交わることを示せ.

(H) 確率変数 X は次の確率密度関数

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta}\right) & (x>0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつとし，この分布から無作為標本 $X_1, ..., X_n$ を抽出したとする．ただし，$\theta > 0$ とする.

(1) X^2 の平均 $E_\theta(X^2)$ と X^4 の平均 $E_\theta(X^4)$ を求めよ.

(2) $X_1, ..., X_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ を求め，その分散 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_n)$ を求めよ.

(3) $X_1, ..., X_n$ がもつ θ に関するフィッシャー情報量 $I_n(\theta)$ を求め，(2) で導出した最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ が有効推定量であることを示せ.

$\boxed{\text{数学}}$

(I) A を整数成分の 2 次正方行列とし，A の行列式を $\det(A)$ で表す．$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ のとき，$A \equiv B \pmod{n}$ を $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{n}$ とする．

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \pmod{5}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \pmod{7}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \pmod{11},$$

$n_1 = 5,\ n_2 = 7,\ n_3 = 11$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対し，$\det(A) \equiv x_i \pmod{n_i}$ を満たす x_i のうち，絶対値が最小となるものを求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\det(A) \equiv x \pmod{n_1 n_2 n_3}$ を満たす x のうち，絶対値が最小となるものを求めよ．

(3) $\displaystyle\max_{1 \le i,j \le 2} |a_{ij}| \le c$ のとき，$|\det(A)| \le 2c^2$ を示せ．

(4) $\displaystyle\max_{1 \le i,j \le 2} |a_{ij}| \le 9$ とする．このとき，(2) で求めた x に対し，$\det(A) = x$ を示せ.