令和７年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］,［6］の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし，

   ［3］ を選択する場合には（A）,（B）のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．

   ［6］ を選択する場合には（E）,（F）,（G）のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．

3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

4. **解答は１題につき答案用紙１枚**とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また,［3］,［5］,［6］では（A）,（B）,（C）,（D）,（E）,（F）,（G）の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には，**「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい**．

5. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

6. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1]　$p > 0,\ q > 0$ に対して

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

とおく．$m,\ n$ を正の整数として以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty 2e^{-x^2} x\,dx$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty 2e^{-x^2} x^{2n-1}\,dx = (n-1)!$ が成り立つことを示せ．

(3) $p > 0,\ q > 0$ に対して

$$B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

が成り立つことを示せ．

(4) $R > 0$ に対して $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2\}$ とする．正の整数 $m,\ n$ に対して以下の等式を示せ．

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} 4e^{-(x^2+y^2)} x^{2m-1} y^{2n-1}\,dxdy = (m+n-1)!B(m,n)$$

(5) $B(m,n)$ の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{数学}}$

[2] 3 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 X の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}XP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 次の 2 つの条件を満たす 3 次実対称行列 A を求めよ.

$$\begin{cases} \text{(i) } A^2 = X, \\ \text{(ii) } A \text{ の固有値はすべて非負実数.} \end{cases}$$

数学

[3]　次の **(A)**，**(B)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(A) 次の問いに答えよ.

(1) p を素数とする．加法群 $G_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ および $G_2 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考える．G_1 から G_1 への群同型写像の個数と G_2 から G_2 への群同型写像の個数を求めよ.

(2) f は加法群 $\mathbb{Q}$ から加法群 $\mathbb{Z}$ への群準同型とする．このとき, 任意の $x \in \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = 0$ であることを示せ.

(B) 複素 3 次正方行列全体から成る集合を $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ で表す．これは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であって，かつ環をなす.

(1) 複素 3 次正方行列 A を 1 つ選んで固定する．複素数係数 1 変数多項式 $f(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_nX^n$ の変数 X に A を代入して得られる行列 $f(A) = c_0E + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n$ (ただし E は単位行列とする) の全体を

$$\mathbb{C}[A] = \{\, f(A) \mid f(X) \in \mathbb{C}[X] \,\}$$

で表す．この $\mathbb{C}[A]$ が $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ の部分空間であり，かつ可換な部分環であることを示せ.

(2) $a,\ b,\ c$ を複素数とし，A として

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を選んだ場合, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての $\mathbb{C}[A]$ の次元を, a, b, c の値で場合分けして求めよ.

(3) A として (2) の行列を選んだ場合，$\mathbb{C}[A]$ は素イデアルをただ 1 つ持つことを示せ.

(4) $\mathbb{C}[A]$ が素イデアルをちょうど 2 つ持つような A の例を 1 つ挙げよ.

数学

[4] 以下の問いに答えよ．

(1) 集合 X は空でないとする．写像 $f\colon X \to X$ と X の部分集合 A, B に対し，

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

が成り立つことを示せ．ただし $A \setminus B = \{\, x \in A \mid x \notin B \,\}$ である．

(2) C^∞ 級微分同相な関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $h(0) = 0$ を満たすとし，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 M を

$$M = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x)^2 + h(y)^2 - h(z)^2 = 1 \,\}$$

で定める．

(i) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = h(x)^2 + h(y)^2 - h(z)^2$$

で定める．このとき f の臨界点を求めよ．

(ii) M は 2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ．

(3) 単体的複体

$$K = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_0a_1|, |a_0a_2|, |a_0a_3|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_0a_1a_2|\}$$

の整係数ホモロジー群 $H_*(K)$ を求めよ．また K の定める多面体 $|K|$ は 1 点空間とホモトピー同値であるかを判定し，理由とともに答えよ．

数学

[5]　次の **(C)**，**(D)** の**両方に**解答せよ．

(C) $\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{1}{z^3+1}$$

と定める．$R > 1$ に対して扇形領域

$$S_R = \left\{ z = re^{it} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < r < R,\, 0 < t < \frac{2\pi}{3} \right\}$$

とし，その境界に反時計回りに向きをつけた曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) S_R に含まれる f の極をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を考えることにより $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$ を求めよ．

(D)　区間 $[0,\infty)$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{-2n}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ

(2) 正の整数 n と $x \geq 0$ に対して不等式

$$f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^2}$$

を示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ を求めよ．

数学

[6]　次の **(E)**，**(F)**，**(G)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(E) $(X, <)$ を非可算整列順序集合で次の条件 $(*)$ を満たすものとする.

$(*)$ 任意の $a \in X$ に対し, $X_a := \{x \in X \mid x < a\}$ は可算である.

また, $Y \subset X$ に対し,

$$L(Y) := \{a \in Y \mid \exists x \in Y(x < a) \wedge \forall x \in Y(x < a \to \exists y \in Y(x < y < a))\}$$

と定める. 以下を示せ.

(1) $Y \subset X$ が非可算無限集合のとき $L(Y) \neq \emptyset$.

(2) $Y \subset X$ が可算ならば, ある $a \in X$ が存在し $Y \subset X_a$ となる.

(3) $L(X)$ は非可算集合である.

(F) 確率変数 X がガンマ分布 $G(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$ に従っているとき, X の確率密度関数は

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で与えられる. ただし, $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数とする. $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で, いずれもガンマ分布 $G(2, 1/\theta)$ に従う確率変数とする. ただし, $\theta > 0$ とする.

(1) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_1$ を求めよ.

(2) θ の十分統計量を $\hat{\theta}_2$ とする. (1) で求めた $\hat{\theta}_1$ を $\hat{\theta}_2$ を用いて表せ.

(3) θ の不偏推定量 $\hat{\theta}_3$ を (1) で求めた $\hat{\theta}_1$ を用いて表せ.

数学

(G)　以下の問いに答えよ.

(1) $n_1, n_2, \ldots, n_r$ を対ごとに互いに素な正の整数とし，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ を任意の整数とするとき，$a \equiv a_i \pmod{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす整数 a が存在する。このとき，a は $n = n_1 n_2 \cdots n_r$ を法として一意に定まることを示せ。

(2) 連立合同方程式

$$7x \equiv 15 \pmod{31}, \quad 19x \equiv 43 \pmod{53}$$

の各式をそれぞれ

$$x \equiv a_1 \pmod{31}, \quad x \equiv a_2 \pmod{53}$$

の形にせよ。ただし，a_1, a_2 はそれぞれ 31, 53 よりも小さな非負整数とする。

(3) 連立合同方程式

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv 1 \pmod{31}, & e_1 &\equiv 0 \pmod{53}, \\ e_2 &\equiv 0 \pmod{31}, & e_2 &\equiv 1 \pmod{53} \end{aligned}$$

の解 e_1, e_2 で非負かつ最小のものを求めよ。

(4) (3) の結果を用いて，(2) の連立合同方程式の解 x で非負かつ最小のものを求めよ。