令和６年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．
2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］,［6］の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし，
   ［4］ を選択する場合には（A）,（B）のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
   ［6］ を選択する場合には（E）,（F）,（G）,（H）のいずれか一つに答えよ．二つ以上を選ぶことはできない．
3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
4. 解答は１題につき答案用紙１枚とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また,［4］,［5］,［6］では（A）,（B）,（C）,（D）,（E）,（F）,（G）,（H）の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には，「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい．
5. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
6. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，O はランダウの記号である．

(1) 関数 $\log(1+x)^{1/x}$ について

$$\log(1+x)^{1/x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$ について

$$f(x) = -\frac{e}{2}x + O(x^2) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $t > 0$ に対し，領域 D_t を

$$D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4t^2\}$$

で定め，また

$$I(t) = \iint_{D_t} \frac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$$

とおく．ここに $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$ である．$\displaystyle\lim_{t \to +0} I(t)$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学}}$

［**2**］ 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 2 \\ a & 2 & a \\ 2 & a & a \end{pmatrix}$$

の階数は 2 であるとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次実正則行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 3 次実正方行列全体が，行列の加法とスカラー乗法に関して定める $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $M_3(\mathbb{R})$ において，部分集合

$$S = \{\, X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = -XA \,\}$$

が部分空間をなすことを示せ．また，S の次元と 1 組の基底を求めよ．

(4) (3) と同じ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $M_3(\mathbb{R})$ において，部分集合

$$T = \{\, AX + XA \mid X \in M_3(\mathbb{R}) \,\}$$

が部分空間をなすことを示し，その次元を求めよ．

$\boxed{\text{数学}}$

［**3**］ 以下の問いに答えよ．

(1) 環 $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ．ただし，乗法群とは乗法に関する可逆元全体のなす群である．

(2) 任意の整数 x, y に対して，$xy \equiv 1 \pmod{24}$ ならば $x \equiv y \pmod{24}$ であることを示せ．

(3) $p \geq 5$ を素数とする．$xy \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $x \not\equiv y \pmod{p}$ を満たす整数 x, y が存在することを示せ．

(4) 正の整数 N が 24 の約数であるためには，任意の整数 x, y に対して，$xy \equiv 1 \pmod{N}$ ならば $x \equiv y \pmod{N}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．

$\boxed{\text{数学}}$

［4］ 次の（**A**），（**B**）のうち１つを選び 解答せよ．

（**A**）C^∞ 級写像 $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(x,y,z,w) = (x^2 + 2zw - y^2 - 1, z^2 + 2xy - w^2)$$

で定め，$M = F^{-1}(\{(0,0)\})$ とおく．

(1) F の臨界点を求めよ．

(2) M は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分多様体であることを示せ．

(3) C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z,w) = w$$

で定める．点 $\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in M$ は f の臨界点であることを示せ．

（**B**）X, Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ に対し，直積空間 $X \times Y$ の部分集合 G を

$$G = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) Y をハウスドルフ空間とし，f が連続であるとき G は $X \times Y$ の閉集合であることを示せ．

(2) 写像 $p\colon X \times Y \to X$ を $p(x,y) = x$ で定める．Y がコンパクト空間のとき p は閉写像であることを示せ．

(3) Y がコンパクト空間のとき G が $X \times Y$ の閉集合であれば f は連続であることを示せ．

$\boxed{\text{数学}}$

［5］ 次の（**C**），（**D**）の両方に解答せよ．

（**C**）$\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 上半平面 $\mathrm{Im}z > 0$ における f の極をすべて求め，かつ，各極における留数を計算せよ．

(2) $R > 1$ とし，

$$C_R = \{Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

とする．不等式

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^4-1)}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ を求めよ．

（**D**）$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+e^{-nx}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f_n(x)\,dx$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学}}$

［6］ 次の（**E**），（**F**），（**G**），（**H**）のうち１つを選び 解答せよ．

（**E**）集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{t \mid t\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}$ を S とおく．以下を示せ．

(1) S は可算集合である．

(2) 次の性質を満たし，連続体濃度を持つ集合 $A \subset \{f \mid f\colon S \to \{0,1\}\}$ が存在する．

- 相異なる $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l \in A$ に対して

$$\{t \in S \mid f_1(t) = \cdots = f_k(t) = 1, g_1(t) = \cdots = g_l(t) = 0\}$$

は無限集合である．

(3) 次の性質を満たし，連続体濃度を持つ集合 $B \subset P(\mathbb{N})$ が存在する．

- 相異なる $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l \in B$ に対して

$$X_1 \cap \cdots \cap X_k \cap (\mathbb{N} \setminus Y_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{N} \setminus Y_l)$$

は無限集合である．ただし，$P(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ のべき集合を表す．

（**F**）一様分布 $U(1, \theta+1)$ からの無作為標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．ただし，$n \geq 2$ とし，θ は正の実数とする．$Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とおく．

(1) Y の平均 $E_\theta(Y)$ を計算せよ．

(2) Y を用いて，θ の不偏推定量 $\widehat{\theta}$ を１つ求め，その分散 $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta})$ を計算せよ．

(3) (2) で導出した $\widehat{\theta}$ について，$\widetilde{\theta}_c = c\widehat{\theta}$ とおく．ただし，$0 < c < 1$ とする．θ に対する $\widetilde{\theta}_c$ の平均２乗誤差 $E_\theta\left((\widetilde{\theta}_c - \theta)^2\right)$ と $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta})$ の大小を比較せよ．

数学

(G) K を体とし，K$[x]$ を K 上の 1 変数多項式環とする．$p \in \mathrm{K}[x]$ の次数を $\deg(p)$ で表す．ただし $\deg(0) = -\infty$ と定義する．$f, g \in \mathrm{K}[x]$ とし，$\deg(f) \geq \deg(g) > 0$ とする．このとき，自然数 $\lambda \geq 1$ および多項式 $r_0, r_1, \ldots, r_\lambda \in \mathrm{K}[x]$, $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda \in \mathrm{K}[x]$ を次式で定める：

$$\begin{aligned} r_0 &= f, \quad r_1 = g, \\ r_{i-1} &= r_i q_i + r_{i+1}, \quad \deg(r_{i+1}) < \deg(r_i), \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1), \\ r_{\lambda-1} &= r_\lambda q_\lambda. \end{aligned}$$

さらに，多項式 $s_0, s_1, \ldots, s_\lambda \in \mathrm{K}[x]$ および $t_0, t_1, \ldots, t_\lambda \in \mathrm{K}[x]$ を次式で定める：

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & t_0 &= 0, \\ s_1 &= 0, & t_1 &= 1, \\ s_{i+1} &= s_{i-1} - s_i q_i, & t_{i+1} &= t_{i-1} - t_i q_i \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1). \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $i = 0, \ldots, \lambda$ に対し，$s_i f + t_i g = r_i$ が成り立つことを示せ．

(2) $i = 1, \ldots, \lambda$ に対し，$\deg(s_i) \leq \deg(g) - \deg(r_{i-1})$ が成り立つことを示せ．

(3) $i = 1, \ldots, \lambda$ に対し，$\deg(t_i) \leq \deg(f) - \deg(r_{i-1})$ が成り立つことを示せ．

(H) h は正の実数とし，$a_i = (i-2)h$ $(i = 1, 2, 3)$ とする．$L_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ は

$$L_i(a_j) = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, 3)$$

を満たす 2 次多項式とする．ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．実数全体で定義された C^∞ 級関数 u に対して，

$$p(x) = \sum_{i=1}^{3} u_i L_i(x), \qquad u_i = u(a_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と定義する．

(1) $L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ を h を用いて表せ．

(2) $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ と表したとき，p_0, p_1, p_2 を u_1, u_2, u_3, h を用いて表せ．

(3) $p_1 = u'(h) + O(h^2)$ $(h \to 0)$ および $p_2 = u''(h)/2 + O(h^2)$ $(h \to 0)$ を示せ．ただし，O はランダウの記号である．