

令和7年度

筑波大学大学院 推薦入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

小論文

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 問題は2題とも解答せよ。
3. 答案冊子は答案用紙2枚からなる。それぞれの答案用紙に、学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること。
4. **解答は1題につき答案用紙1枚**とし、それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には、「ウラヘ」と明記して裏面を使用してよい。
5. 下書用紙は2枚ある。それぞれの下書用紙に、学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること。
6. 問題冊子および下書き用紙は試験終了後に回収するので持ち帰らないこと。

数学学位プログラム

注意 \mathbb{R} は実数全体を表すものとする.

[1] \mathbb{R}^4 の2つのベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, その標準内積を (\mathbf{x}, \mathbf{y}) とする. 零ベクトルでないベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) に対して, \mathbb{R}^4 の線形変換 f を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4)$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 合成写像 $f \circ f$ が恒等写像 id に一致することを示せ.
- (2) -1 が f の固有値であることを示せ.
- (3) 1 が f の固有値であることを示せ.
- (4) \mathbb{R}^4 の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ で, この基底に関する f の表現行列が対角行列になるものが存在することを示せ.

[2] 以下の問いに答えよ.

- (1) \mathbb{R}^2 上の実数値関数 $f(x, y)$ が $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で全微分可能であることの定義を述べよ.
また, $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能ならば $f(x, y)$ は (a, b) で連続であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}^2 上の C^∞ 級の実数値関数 $g(x, y)$ と \mathbb{R} 上の C^∞ 級の実数値関数 $\varphi(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $g(x, \varphi(x)) = 0$ をみたしているとする.

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1, & \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) &= \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 1 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1) &= 2, & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 1) &= -1, & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, 1) &= 3\end{aligned}$$

であるとき, $\frac{d\varphi}{dx}(1)$ および $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(1)$ を求めよ.

- (3) \mathbb{R}^2 の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x + y \leq 1, (x + y + 1)(x - y)^2 \leq x + y\}$$

とする. 重積分

$$\iint_D (x + y + 1)|x - y| dx dy$$

の値を求めよ.