令和７年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

（1-2月期）

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて６枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．
2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］の５題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし,［3］を選択する場合には（A）,（B）のいずれか一つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
4. **解答は１題につき答案用紙１枚**とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には，**「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい**.
5. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
6. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1]　$0 < R < \pi/2$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の開集合 U_R を

$$U_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < R^2\}$$

と定める．U_R 上の関数 $f\colon U_R \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = \tan\sqrt{x^2 + y^2}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x, y) \in U_R$ に対して

$$g(x, y) = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ は U_R 上で極値をとらないことを示せ．

(3) 定数 a, b $(0 < a < b < R)$ に対して，U_R の部分集合 $D_{a,b}$ を

$$D_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

と定める．このとき重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} g(x, y)\, dxdy$ の値を a, b を用いて表せ．

(4) 定数 ε $(0 < \varepsilon < R)$ に対して，U_R の部分集合 U_ε を

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$$

と定める．広義積分 $\displaystyle\iint_{U_\varepsilon} g(x, y)\, dxdy$ の値を ε を用いて表し，極限値

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{U_\varepsilon} g(x, y)\, dxdy$$

を求めよ．

数学

[2]　3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2\sqrt{3} \\ 2 & 9/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) cA が直交行列となる正の値 c を求めよ.

(2) 行列 A が $1/c$ を固有値としてもつことを示し，それに属する固有ベクトルを求めよ.

(3) 線形写像 $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で定める．T が $\mathbb{R}^3$ の変換として回転と拡大の合成であることを示し，その回転軸と拡大率を求めよ．また，その回転角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

数学

[3]　次の（A），（B）のうち**1つを選び**解答せよ．

（A） $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

（1）A の固有多項式を求めよ．ただし，不定元は x とせよ．

（2）A の固有多項式は $\mathbb{Q}[x]$ において既約であることを示せ．

（3）$\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{Q}^3$ の $\mathbf{0}$ でない元とするとき，$\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}, A^2\boldsymbol{a}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

（B） G を群とする．$g \in G$ が与えられたとき，写像 $f_g : G \to G$ を $f_g(x) = gxg^{-1}$ $(x \in G)$ で定める．また，

$$Z(g) = \{x \in G \mid f_g(x) = x\} \quad (g \in G),$$
$$C(x) = \{f_g(x) \mid g \in G\} \quad (x \in G)$$

で定める．以下の問いに答えよ．ただし，有限集合 X に対して，$|X|$ は X に含まれる元の個数を表す．

（1）各 $g \in G$ について，f_g は群の同型写像であることを示せ．

（2）各 $g \in G$ について，$Z(g)$ は G の部分群であることを示せ．

（3）G は位数 (サイズ) が 2 以上の有限群であるとする．このとき，各 $x \in G$ について，$|C(x)|$ は $|G|$ とは異なる $|G|$ の約数であることを示せ．

（4）S_n を n 次対称群とする．巡回置換 $x = (i_1, \ldots, i_m) \in S_n$ と $g \in S_n$ に対して，

$$f_g(x) = (g(i_1), \ldots, g(i_m))$$

が成り立つことを示せ．

（5）S_5 において，$g = (1, 2)$ のとき $Z(g)$ の位数 (サイズ) を求めよ．

（6）S_5 において，$x = (1, 2)(3, 4)$ のとき $|C(x)|$ を求めよ．

数学

[4]　以下の問いに答えよ．

（1）$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$A_1 = (-2,0],\quad A_2 = (-1,1),\quad A_3 = [0,2),$$
$$A_{3m+1} = (-2,0],\quad A_{3m+2} = (-1,1),\quad A_{3m+3} = [0,2) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

で定め，

$$A^* = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\quad A_* = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

とおく．A^*，A_* をそれぞれ求めよ．

（2）$\mathbb{R}^3$ の部分集合 M を

$$M = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\,\}$$

で定める．

(i) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$$

で定める．このとき f の臨界点を求めよ．

(ii) M は 2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ．

（3）単体的複体

$$K = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, |a_2a_3|, |a_3a_0|\}$$

の整係数ホモロジー群 $H_*(K)$ を求めよ．また K の定める多面体 $|K|$ は 1 点空間とホモトピー同値であるかを判定し，理由とともに答えよ．

$\boxed{\textbf{数学}}$

[5]　次の **(C)**，**(D)** の**両方に**解答せよ．

(C) $\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{e^z + e^{-z}}$$

と定める．$R > 0$ に対して

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < R,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

とし，その境界に反時計回りに向きをつけた曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) $|\operatorname{Re} z| = R$ のとき $|e^z + e^{-z}| \geq e^R - e^{-R}$ が成り立つことを示せ．

(2) D_R に含まれる f の極をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を考えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi} + e^{-\pi}}$$

であることを示せ．

(D) 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ を求めよ．

(2) $x \geq 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}e^{-x^2}}{1 + x^n}$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+1}e^{-x^2}}{1 + x^n}\,dx$ を求めよ．