

令和8年度

筑波大学大学院 推薦入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

## 小論文

### 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 問題は2題とも解答せよ。
3. 答案冊子は答案用紙2枚からなる。それぞれの答案用紙に、学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること。
4. **解答は1題につき答案用紙1枚**とし、それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ。おもて面だけで書ききれない場合には、「**ウラヘ**」と明記して裏面を使用してよい。
5. 下書用紙は2枚ある。それぞれの下書用紙に、学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること。
6. 問題冊子および下書き用紙は試験終了後に回収するので持ち帰らないこと。

## 数学学位プログラム

**注意**  $\mathbb{R}$  は実数全体を表すものとする.

[1] 2以上の整数  $n$  に対して,  $n$ 次実正方行列  $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  を次で定める.

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち,  $A_n$  は  $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) であり, 残りの成分はすべて 0 の行列である. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $A_2$  の固有値をすべて求めよ. また, 各固有値に属する固有ベクトルを1つ求めよ.
- (2)  $A_3, A_4$  のそれぞれについて, 0を固有値に持つかどうか判定せよ. また, 0を固有値に持つ場合は, 固有値0に属する固有空間の次元を求めよ.
- (3)  $A_n$  が0を固有値に持つような  $n$  をすべて求めよ. また, そのときに固有値0に属する固有ベクトルを1つ求めよ.

[2]

(1)  $\mathbb{R}$  上の関数  $f$  を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(i) 関数  $f$  は  $\mathbb{R}$  において微分可能であることを示せ。

(ii) 関数  $f$  は  $\mathbb{R}$  において  $C^1$  級でないことを示せ。

(2) 次の重積分を計算せよ。

(i) 定数  $a > 0, b > 0$  に対して  $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$  のとき

$$\iint_{D_a} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}$$

(ii) 定数  $c > 1$  に対して  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  のとき

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}}$$