令和８年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて８枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．
2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］,［6］の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし，
   ［3］ を選択する場合には（A）,（B）のいずれか１つに答えよ．両方を選ぶことはできない．
   ［6］ を選択する場合には（E）,（F）,（G）のいずれか１つに答えよ．２つ以上を選ぶことはできない．
3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
4. **解答は１題につき答案用紙１枚**とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また,［3］,［5］,［6］では（A）,（B）,（C）,（D）,（E）,（F）,（G）の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には，**「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい**．
5. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．
6. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1]　以下の問いに答えよ．

(1) 領域 $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ における関数

$$f(x, y) = \cos x \sin y + \sin x$$

の極値を求めよ．

(2) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x\}$ とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_{D_2} \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}\, dxdy$$

(3) 次の極限を計算せよ．

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{dt}{1 + t^2}$$

数学

[2] a を実数とする．4 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

の第 1 列，第 2 列，第 3 列を順に $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である．また

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を A が定める線形変換とし，W を f の像とする． A の階数が 3 であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は W の基底であることを示せ．

(3) W の線形変換 $g\colon W \to W$ を，$\boldsymbol{w} \in W$ に対し $g(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w})$ で定める．基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に関する g の表現行列 B を求めよ．

(4) (3) で求めた B に対し， $P^{-1}BP$ が対角行列となるような 3 次実正則行列 P は存在しないことを示せ．

数学

[3] 次の **(A)**，**(B)** のうち **1つを選び** 解答せよ．

(A) 以下の問いに答えよ．

(1) 加法群

$$\mathbb{Z}^2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

に対し，群準同型 $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ は，整数を成分にもつ 2 次正方行列 A を用いて

$$f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

により与えられること，またこのような A は一意的に定まることを示せ．

(2) 群準同型 $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ が上のような正方行列 A により与えられているとき，次の 4 つの条件が互いに同値になることを示せ．

(i) f が単射である．

(ii) A の行列式が 0 と異なる．

(iii) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ が $\mathbb{Z}^2$ と同型である．

(iv) $\mathbb{Z}^2$ の $\mathrm{Im}\, f$ による剰余群 $\mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\, f$ が有限群である．

(3) $A = \left(\begin{smallmatrix} 12 & 18 \\ 4 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ により与えられる群準同型 $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ について，$\mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\, f$ を巡回群の直積として表せ．

(B) 以下の問いに答えよ．

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分体は $\mathbb{Q}$ のみであることを示せ．

(2) 2 次正方行列からなる集合

$$S = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

を考える．S は行列の和と積により環である．このとき S と複素数体 $\mathbb{C}$ は環として同型であることを示せ．

(3) $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ を 3 元体とし，$\mathbb{F}_3[x]$ を $\mathbb{F}_3$ 上の 1 変数多項式環とする．$f(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ とおく．$f(x)$ は既約かどうかを判定せよ．また，$\mathbb{Z}[x]$ を整数環 $\mathbb{Z}$ 上の 1 変数多項式環とし，$F(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 100 \in \mathbb{Z}[x]$ とおく．$F(x)$ が既約かどうかを判定せよ．

(4) $\mathbb{Z}[x]$ におけるイデアル $I = (7, x)$ および $J = (8, x)$ を考える．イデアルの積 IJ が単項イデアルかどうかを判定せよ．

$\boxed{\text{数学}}$

[4] 以下の問いに答えよ．

(1) 集合 X, Y は空でないとする．写像 $f\colon X \to Y$ と Y の部分集合 A に対し，

$$f(f^{-1}(A)) \subset A$$

が成り立つことを示せ．また f が全射であれば

$$f(f^{-1}(A)) = A$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を

$$M = \{\,(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xw - yz = 1\,\}$$

で定める．

(i) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z, w) = xw - yz$$

で定める．このとき f の臨界点を求めよ．

(ii) M は C^∞ 級多様体であることを示せ．またその次元を答えよ．

(3) 単体的複体

$$K = \left\{ \begin{array}{l} |a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, \\ |a_0a_2|, |a_0a_3|, |a_3a_4|, |a_0a_4|, |a_0a_3a_4| \end{array} \right\}$$

の整係数ホモロジー群 $H_*(K)$ を求めよ．また K の定める多面体 $|K|$ は 1 点空間とホモトピー同値であるかを判定し，理由とともに答えよ．

数学

[5] 次の **(C)**，**(D)** の**両方に**解答せよ．

(C) 定数 $a > 0$ に対して $\mathbb{C}$ 上の関数 f を

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^4 + 4}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ における f の極をすべて求め，かつ，各極における留数を計算せよ．

(2) $R > \sqrt{2}$ とし，

$$D_R = \{\, re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r \leq R,\, 0 \leq \theta \leq \pi \,\}$$

とする．D_R の境界に反時計回りに向きをつけた曲線を C_R とする．$\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4}\,dx$ を求めよ．

(D) $(1, \infty)$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 x (x^{\frac{1}{n}} - 1)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(3) 正の整数 n と $x \in (1, \infty)$ に対して不等式 $n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \geq \log x$ を示せ．

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_e^{\infty} f_n(x)\,dx$ を求めよ．

数学

[6] 次の **(E)**, **(F)**, **(G)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(E) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ を $\mathbb{N}$ のべき集合とする. $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が次の条件 (a) から (c) を満たすとき, F を $\mathbb{N}$ 上のフィルターといい, さらに条件 (d) を満たすとき $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルターという.

(a) $\emptyset \notin F \wedge \mathbb{N} \in F$.

(b) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$.

(c) $A \in F \wedge A \subset B \subset \mathbb{N} \Rightarrow B \in F$.

(d) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus F \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \in F$.

以下の問いに答えよ.

(1) 有限集合を元として含む $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルターは必ず 1 元集合を含むことを示せ.

(2) 任意の $\mathbb{N}$ 上のフィルター F に対し, $F \subset F^*$ を満たす $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルター F^* が存在することを Zorn の補題を用いて示せ.

(3) $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $(n \in \mathbb{N})$ が $A_n \supsetneq A_m \Leftrightarrow n < m$ を満たすとする. $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset F$ を満たす $\mathbb{N}$ 上のフィルター F が存在することを示せ.

(4) $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルターは非可算個存在することを示せ.

(F) $X_1, \cdots, X_n$ $(n \geq 2)$ を独立な確率変数とする. 各 $k = 1, \cdots, n$ について, X_k は下記の確率密度関数 $f_{X_k}(x, \lambda)$ をもつ分布に従うものとする. ただし, $\lambda > 0$ とする.

$$f_{X_k}(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\lambda} e^{-\frac{x}{k\lambda}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(1) $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とする. λ の不偏推定量 $\hat{\lambda}_1$ を $\bar{X}$ を用いて構築せよ.

(2) λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}_2$ を求めよ.

(3) $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ の分散をそれぞれ求めよ. また, λ の推定量としてそれらの良さを比較せよ.

数学

(G) R をユークリッド整域，$d(.)$ をユークリッド関数とし， $f, g \in R$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ とする．このとき， $\lambda \geq 1$, $r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda+1} \in R$ および $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda \in R$ は次式を満たすとする:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= f, \quad r_1 = g, \\
r_{i-1} &= r_i q_i + r_{i+1}, \quad d(r_{i+1}) < d(r_i), \quad (i = 1, \ldots, \lambda - 1), \\
r_{\lambda-1} &= r_\lambda q_\lambda, \quad r_{\lambda+1} = 0.
\end{aligned}
$$

また， $s_0, s_1, \ldots, s_{\lambda+1} \in R$ および $t_0, t_1, \ldots, t_{\lambda+1} \in R$ を次式で定める:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= 1, & t_0 &= 0, \\
s_1 &= 0, & t_1 &= 1, \\
s_{i+1} &= s_{i-1} - s_i q_i, & t_{i+1} &= t_{i-1} - t_i q_i, \quad (i = 1, \ldots, \lambda).
\end{aligned}
$$

さらに， $i = 1, \ldots, \lambda$ に対し，行列 T_i および Q_i を

$$
T_i = \begin{pmatrix} s_i & t_i \\ s_{i+1} & t_{i+1} \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}
$$

とおく．以下の問いに答えよ．ただし， $i = 1, \ldots, \lambda$ とする．

(1) $T_i \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) $T_i = Q_i \cdots Q_1$ が成り立つことを示せ．

(3) $\det(T_i) = (-1)^i$ が成り立つことを示せ．

(4) $f = (-1)^i(r_i t_{i+1} - r_{i+1} t_i)$, $g = (-1)^i(-s_{i+1} r_i + s_i r_{i+1})$ が成り立つことを示せ．