令和８年度

筑波大学大学院 入学試験

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

数学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項

1. 問題冊子はこの表紙を入れて７枚からなる．試験開始の合図があるまでは問題冊子を開けないこと．

2. 問題は［1］,［2］,［3］,［4］,［5］,［6］の６題ある．そのうち３題選択し解答せよ．ただし,

   ［3］ を選択する場合には（A）,（B）のいずれか１つに答えよ．両方を選ぶことはできない．

   ［6］ を選択する場合には（E）,（F）,（G）のいずれか１つに答えよ．２つ以上を選ぶことはできない．

3. 答案冊子は答案用紙３枚からなる．それぞれの答案用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

4. **解答は１題につき答案用紙１枚**とし，それぞれの答案用紙の左上に解答する問題番号を記入せよ．また,［3］,［5］,［6］では（A）,（B）,（C）,（D）,（E）,（F）,（G）の記号も記入せよ．おもて面だけで書ききれない場合には，**「ウラへ」と明記して裏面を使用してよい**．

5. 下書用紙は３枚ある．それぞれの下書用紙に，学術院名・研究群名・学位プログラム名・受験番号を記入すること．

6. 問題冊子も下書用紙も回収する．

数学

注意　$\mathbb{C}$ は複素数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体，$\mathbb{Q}$ は有理数全体，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体のなす集合を，それぞれ表すものとする．

[1]　以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y) = x^2 + 2y + e^{-x-y}$ の $\mathbb{R}^2$ における極値をすべて求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-1| + |y| < 1\}$ とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

数学

[2] a, b を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a = b = 2$ とする．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次実正則行列 P を 1 つ求めよ．

(2) $a + b + 1 = 0$ とする．A の階数 $\operatorname{rank} A$ は 2 であることを示せ．

(3) $a = b = 1$ とする．3 次実正方行列 B が $AB = O$ を満たすならば，$\operatorname{rank} B \leq 2$ であることを示せ．また $AB = O$ かつ $\operatorname{rank} B = 2$ が成立する B を 1 つ求めよ．

$\boxed{\textbf{数学}}$

[3] 次の **(A)**, **(B)** のうち **1 つを選び** 解答せよ.

(A) M を加法群, $a \in M$ は有限位数の元とする. M の元 x の位数を記号 $\mathrm{ord}(x)$ で表す. m, n は正の整数とする.

(1) $\mathrm{ord}(a) = 2$ のとき, $\mathrm{ord}(ma)$ を求めよ.

(2) $\mathrm{ord}(a) = n$ のとき, $\mathrm{ord}(2a)$ を求めよ.

(3) $\mathrm{ord}(a) = n$ のとき, $\mathrm{ord}(ma)$ を求めよ.

(B) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^2 + 3x - 4,\ h(x) = f(x)g(x)$ と置く.

(1) 4 次実正方行列 A を

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める. 4 次実正則行列 P であって $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在しないことを示せ.

(2) 以下の 3 条件を満たす高々3 次実数係数多項式 $e_0(x)$ と $e_1(x)$ が存在することを示せ.

(i) $e_0(x) + e_1(x) = 1$ である.

(ii) $e_0(x)$ を $f(x)$ で割った余りは 1 であり, かつ $e_0(x)$ を $g(x)$ で割った余りは 0 である.

(iii) $e_1(x)$ を $f(x)$ で割った余りは 0 であり, かつ $e_1(x)$ を $g(x)$ で割った余りは 1 である.

(3) 任意の 4 次実正方行列 B に対し, B の特性多項式が $h(x)$ であるならば,

$$\mathbb{R}^4 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(B)v = 0\} \oplus \{v \in \mathbb{R}^4 \mid g(B)v = 0\}$$

であることを示せ.

数学

[4] 以下の問いに答えよ．

(1) 集合 X, Y は空でないとする．写像 $f\colon X \to Y$ と Y の部分集合 A に対し，

$$f(X \setminus f^{-1}(A)) \cap A = \emptyset$$

であることを示せ．ただし $B \subset X$ に対し $X \setminus B = \{\, x \in X \mid x \notin B \,\}$ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 M を

$$M = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - yz = 1 \,\}$$

で定める．

(i) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = x^2 - yz$$

で定める．このとき f の臨界点を求めよ．

(ii) M は C^∞ 級多様体であることを示せ．またその次元を答えよ．

(3) 単体的複体

$$K = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, |a_0a_2|, |a_0a_3|\}$$

の整係数ホモロジー群 $H_*(K)$ を求めよ．また K の定める多面体 $|K|$ は 1 点空間とホモトピー同値であるかを判定し，理由とともに答えよ．

数学

[5] 次の（C），（D）の**両方に**解答せよ.

（C） $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = \sqrt{2}\}$ とし，C の向きは反時計回りにとる．また，$z^5 - 1 = 0$ の解で $\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0$ を満たすものを α とする．$f(z) = \dfrac{1}{z^5 - 1}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) C で囲まれる円の内部にある f の 1 と異なる極をすべて求め， α を用いて表せ.

(2) 以下を満たす整数 a, b, c で，$1 \leq a, b, c \leq 10$ を満たすものを求めよ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \frac{b + \sqrt{c}}{a}$$

（D） $[0, \infty)$ を定義域とする関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ および $g(x)$ を次で定める.

$$f_n(x) = \frac{nx^n}{1 + nx^n}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ \dfrac{1}{x\{1 + (\log x)^2\}} & (1 \leq x) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)g(x)\,dx$ を求めよ.

数学

[6]　次の（E），（F），（G）のうち**１つを選び** 解答せよ．

（E）　S を $\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq 0\}$ が有限となる写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 全体の集合とし，S 上の 2 項関係 $\prec$ を

$$f \prec g \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}(f(i) < g(i) \wedge \forall k \in \mathbb{N}(i < k \Rightarrow f(k) = g(k)))$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) S は可算集合であることを示せ．

(2) $\prec$ は S 上の順序であることを示せ．

(3) $\prec$ は S 上の整列順序であることを示せ．

(4) 次の条件 $(*)$ を満たす $g \in S$ を求めよ．ただし，$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の順序 $\lhd$ を

$$(a, b) \lhd (a', b') \Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b < b')$$

で定める．

$(*)$　$\prec$ を $\{f \in S : f \prec g\}$ に制限して得られる順序集合と $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \lhd)$ は順序同型である．

（F）一様分布 $U(\theta/2, \theta)$ からの無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．ただし，$n \geq 2$ とし，θ は正の実数とする．$Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とおく．

(1) Y と Z の平均 $E_\theta(Y)$ と $E_\theta(Z)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ある定数 c_1 と c_2 を用いて，$\hat{\theta}_1 = c_1 Y$, $\hat{\theta}_2 = c_2 Z$ とおく．そのとき，$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ がそれぞれ θ の不偏推定量となるように c_1 と c_2 を定めよ．

(3) (2) で定めた c_1 と c_2 に対して，$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ の分散 $V_\theta(\hat{\theta}_1)$ と $V_\theta(\hat{\theta}_2)$ をそれぞれ求めよ．また，θ の推定量としてそれらの良さを比較せよ．

（G）　多項式 $x^3 - x^2 - 3x - 2$ の根の 1 つを α とする．$\alpha^2 + 2\alpha + 1$ の乗法の逆元を $A\alpha^2 + B\alpha + C$ の形に表せ．ただし，A, B, C は有理数とする．