**無限への誘い**

塩谷真弘（筑波大学数理物質系）

今このページを開いてみたあなたは, 無限についてなにがしかの興味をお持ちのようですね.「無限の彼方」は大昔からある表現ですが，数学の世界で「無限の彼方」が考えられるようになったのは，微分・積分が誕生した頃（17 世紀）から，ということになりそうです.

**カントルの挑戦．**現代の数学では，数列 $\{a_n\}$ の極限値を $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書き表します．ここで，記号「$\infty$」は単独では意味を持たず,「$n$ が限りなく大きくなるとき」を「$n \to \infty$」と表現しただけであることに注意してください.

ある時，カントル（1845–1917）は研究上の必要から

$$X_0 = \mathbb{R}\ (=\text{実数全体の集合}),\ X_{n+1} = {X_n}'$$

で定まる集合の列 $\{X_n\}$ を考えていました．ここで，$X \mapsto X' \subset X$ は $\mathbb{R}$ の部分集合の間の変換規則と思ってください．そして，もし $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = X_0 \cap X_1 \cap \cdots$ が空でなければ, $X_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ とおいて $X_{\omega+1} = {X_\omega}', \cdots$ を考えざるを得なくなりました．こうしてカントルは可能無限 ($n \to \infty$) とは異なる実無限 ($\omega$) に遭遇し，無限そのものの研究へと向かっていきました．カントルが残した手法（**対角線論法**）と問題（**連続体仮説**）は，現代においても非常に重要です.

**ラッセルの逆理．**ラッセル（1872–1970）は，対角線論法を集合概念自体に適用することによって

$$\{x : x \notin x\}$$

を集合と考えると矛盾が導かれることを示しました．これは，カントル流の集合概念がある意味で自由すぎたことを示しています．ラッセルの「逆理」は，集合概念を捨て去るのではなく，その基礎を固めるためのきっかけになりました．基礎には，集合概念以前の論理の部分の形式化とそれに基づいた集合概念の形式化に分けられます．参加者の皆さんには，論理計算の実際を体験していただく予定です（特別な準備は不要です）.

**ゲーデルの定理．**現代の数理論理学は，ゲーデル（1906–1978）による次の 2 つの結果から始まったと言えるでしょう：

**完全性定理．**論理の有限的な公理系で完全（矛盾がなく十分）なものが存在する.
**不完全性定理．**（ある程度の数学を展開できる）集合の有限的な公理系は不完全である.

標語的には,「論理の完全性」と「理論の不完全性」と言えるでしょう．特に後者からは，集合の標準的公理系 ZFC には，証明も反証もできない命題があることがわかります．このような（否定的とも思える）結果を証明しておきながら，ゲーデル自身は連続体仮説の正否を決定することを夢見ていたといいます．そしてゲーデルの夢は，集合論自体を発展させる大きな原動力となりました．ゲーデル以降の集合論の発展についても，時間の許す限りご説明しようと思います.

# ゼータ関数の特殊値

木村健一郎 (筑波大学数理物質系)

バーゼル問題とは、「平方数全ての逆数の和は収束するか？　収束すれば、その値はいくつか？」という問題です。具体的には

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ、という問題です。Wikipedia によると、この問題はピエトロ・メンゴリが 1644 年に出したそうです。ヤコブ・ベルヌイやレオンハルト・オイラーなどバーゼル出身の数学者がこの問題に取り組んだことからこの名前がついたそうです。オイラーは長年の努力の後に、1735 年ごろこの値が $\frac{\pi^2}{6}$ であることを証明しました。　オイラーが与えた証明のうち一つを紹介します。それは $\sin \pi x$ の無限積展開

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$$

を用いるものです。右辺を展開すると

$$\pi x \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2}) = \pi x \left(1-(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})x^2+\cdots\right) = \pi x - \pi(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})x^3+\cdots$$

となります。　一方 $\sin x$ の Taylor 展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}+\cdots$$

より、左辺は $\pi x - \frac{1}{6}(\pi x)^3+\cdots$ となります。　両辺の $x^3$ の項を比べることで $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を得ます。もう少し考えると、$r$ が偶数のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r} = (\text{有理数}) \times \pi^r$$

となることが分かります。実数 $s$ に対し、無限級数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

は $s>1$ のとき収束します。これをゼータ関数と言います。$\zeta(s)$ の $s$ が整数の時の値を**特殊値**と言います。オイラー以来、ゼータの特殊値は興味深い研究対象となっています。オイラーは $s$ が偶数のときの特殊値について重要な結果を示しました。では $s$ が奇数の時はどうでしょう？ この場合はあまりよく分かっていません。Apéry は 1978 年に $\zeta(3)$ が無理数であることを証明しました。講義では、Beukers がその 1 年後に与えた微積分を使う証明を紹介したいと思います。非常に巧妙で複雑な証明です。$\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)\cdots$ も無理数であることが予想されていますがまだ証明されていません。$\zeta(s)$ の重要な性質として無限積表示

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

を持つことが挙げられます。ここで $p$ は素数全体にわたります。これは**オイラー積**表示と呼ばれます。

話はこれで終わりません。19 世紀に、デデキントは代数体 (有理数体の有限次拡大体)$F$ に対しデデキントのゼータ関数 $\zeta_F(s)$ を定義しました。$\zeta_F(s)$ はオイラー積として定義されます。例えば $F$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ のときは

$$\zeta_F(s) = \zeta(s) \times \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

となります。ここで $\chi(p)$ は

$$\chi(p) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1,\, 11 \pmod{12} \\ -1 & p \equiv 5,\, 7 \pmod{12} \\ 0 & p = 2,\ 3 \end{cases}$$

と定められます。最初に定義した $\zeta(s)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ のゼータ関数となっています。デデキントは

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_F(s) = (\text{有理数}) \times (\pi\text{のべき}) \times |D_F|^{-\frac{1}{2}} \times R$$

という事実を示しました。ここで、$D_F$ は $F$ の判別式という整数です。$R$ ですが、これは $F$ の**単数基準**という実数で、$F$ の整数環の単数群の情報を持っています。$F$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ のときは $D_F$ と $R$ は共に 1 です。さらに 1 世紀後に、ボレルは 1970 年代に**代数的** $K$ **群**のレギュレーターによりこの結果をさらに一般化しました。それによると $n > 1$ に対し、

$$\zeta_F(n) = (\text{有理数}) \times (\pi\text{のべき}) \times |D_F|^{-\frac{1}{2}} \times (\text{レギュレーター})$$

となることが分かります。

話はこれで終わりません。ゼータ関数は、有理数体上の代数多様体に対しても定義されることが分かります。これをハッセ-ヴェイユのゼータ関数と言います。1970 年代にブロックは虚数乗法を持つ楕円曲線という 1 次元の代数多様体のハッセ-ヴェイユのゼータ関数の $s = 2$ での値が、代数的 $K$ 群のレギュレーターと関係することを示しました。この結果を基に、ベイリンソンはハッセ-ヴェイユのゼータ関数の特殊値と代数的 $K$ 群のレギュレーターを関係づける一般的な予想を与えました。これは非常に難しいですが、また非常に魅力的な予想です。

講義ではこれらの内容を時間が許す限り解説したいと思います。